האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

תשובות לדוגמה ודיון בבחינה בלוגיקה מתימטית (1) (32408)

סמסטר הסתיו – תשס"ד – מועד א'

1א. כתוב נוסחה בשפת תורת השדות (שקבועיה הם $0, 1, +, \cdot$ ורק אלו) האומרת שלכל משוואה ריבועית, כלומר למשוואה שמעלתה בדיוק 2, יש פתרון.

התשובה הפשוטות ביותר הן $\forall a \forall b \forall c \exists x (a \neq 0 \to a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0)$ ו- $\forall a (a \neq 0 \to \forall b \forall c \exists x (a \cdot x \cdot x + b \cdot x + c = 0))$. אם רוצים לדקדק יותר, ואין זה חיוני, שמים לב שהפעולות $+$ ו-$\cdot$ הן דו-מקומיות ולכן מוסיפים סוגרים וכותבים, למשל, $\forall a \forall b \forall c \exists x (a \neq 0 \to ((a \cdot (x \cdot x) + b \cdot x) + c = 0)$.

הקטע $a \neq 0 \to$ נוסף כי מדובר במשוואה שמעלתה בדיוק 2, ואם המקדם של x^2 הוא 0 אז מעלת המשוואה קטנה מ-2.

שגיאות חמורות הן: השימוש בכמתים שונים מאלו שבדוגמאות, השארת משתנים לא מכומתים, הקדמת הכמת $\exists x$ לפני הכמתים האחרים, ושימוש בקשר $\wedge$ או $\vee$ במקום ב- $\to$ אחרי $a \neq 0$.

נוסחה האומרת משהו כללי ואינה נותנת תכונה של איבר משתנה חייבת להיות פסוק, ולכן כל המשתנים בנוסחה חייבים להיות מכומתים.

השימוש ב-x^2 הוא טעות כי בשפה בה יש לכתוב את הפסוק אין סימן לפעולת החזקה.

ב. (i) הגדר את מושג הכריעות החיובית.

(ii) הוכח שאחוד של שתי קבוצות כריעות חיובית גם הוא כריע חיובית.

(iii) האם המשלימה של קבוצה כריעה חיובית היא כריעה חיובית? (אל תוכיח דבר בחלק זה, רק צטט משפטים הנוגעים לענין זה).

(i) קבוצת מחרוזות A היא כריעה חיובית אם קיים יחס כריע R כך שלכל מחרוזת ϕ, $\phi \in A$ אםם קיימת מחרוזת ψ כך שמתקיים $R(\phi, \psi)$.

השגיאה הנפוצה בתשובה לשאלה זאת הייתה בהגדרה ש-A היא כריעה חיובית אם קיים יחס כריע R וקיימת מחרוזת ψ כך שלכל מחרוזת ϕ, $\phi \in A$ אםם קיים $R(\phi, \psi)$. לפי הגדרה שגויה זאת כל קבוצה כריעה חיובית היא כריעה כי עבור מחרוזת ψ קבועה קבוצת המחרוזות ϕ שעבורן קיים $R(\phi, \psi)$ היא כריעה כי לכל מחרוזת ϕ האלגוריתם המחשב את R נותן תשובה לשאלה אם קיים $R(\phi, \psi)$.

(ii) יהיו A ו-B קבוצות כריעות חיובית. אז קיימים יחסים כריעים R_1 ו-R_2 כך שלכל מחרוזת ϕ $\phi \in A$ אםם קיימת מחרוזת ψ כך שמתקיים $R_1(\phi, \psi)$, ו- $\phi \in B$ אםם קיימת מחרוזת ψ כך שמתקיים $R_2(\phi, \psi)$. (יש לשים לב לכך שהיחסים R_1 ו-R_2 הם בדרך כלל שונים זה מזה, כי הם חייבים להיות שונים אם הקבוצות A ו-B הן שונות).

נגדיר יחס דו מקומי חדש R ע"י שנקבע כי קיים $R(\phi, \psi)$ אםם קיים $R_1(\phi, \psi)$ או $R_2(\phi, \psi)$. R הוא יחס כריע משום שהוא איחוד של שני היחסים הכריעים R_1 ו-R_2. כעת, לכל מחרוזת ϕ קיים

$\phi \in A \cup B$

אםם $\phi \in A$ או $\phi \in B$

אםם קיים ψ כך שקיים $R_1(\phi, \psi)$ או שקיים ψ כך שמתקיים $R_2(\phi, \psi)$,

כלומר אםם קיים ψ כך שקיים $R_1(\phi, \psi)$ או $R_2(\phi, \psi)$

כלומר אםם קיים ψ כך שקיים $R(\phi, \psi)$.

כך ראינו ש-R הוא יחס כריע וכי לכל מחרוזת ϕ קיים ש- $\phi \in A \cup B$ אםם קיים $R(\phi, \psi)$, ולכן הקבוצה $A \cup B$ כריעה חיובית.

(iii) משלימה של קבוצה כריעה חיובית איננה בהכרח כריעה חיובית. תהי A היא כריעה חיובית. אם A היא כריעה אז ברור כי גם משלימתה היא כריעה. אם A איננה כריעה (ויש קבוצות כריעות חיובית שאינן כריעות, כגון קבוצת העצירה) אז משלימתה איננה כריעה חיובית לאור המשפט האומר שאם קבוצה ומשלימתה שתיהן כריעות חיובית אז הקבוצה היא כריעה.

ג. נוסיף לתחשיב היחסים עם שיוויון כמת $\exists!\mathsf{x}$ כך ש- $\exists!\mathsf{x}\phi$ "אומר" שקיים בדיוק x אחד המקיים את ϕ .

(i) כתוב את הקטע בהגדרת האמת של נוסחה המתאים לכמת זה.

(ii) תהי ϕ נוסחה בתחשיב היחסים שאינה מכילה את הכמת $\exists!$. כתוב ללא שימוש בכמת זה נוסחה השקולה ל- $\exists!\mathsf{x}\phi$. אין צורך בהוכחה מפורטת של השקילות.

(i) התשובה הפשוטה והברורה ביותר היא

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists!\mathsf{x}\phi)[s] = \begin{cases} \mathsf{T} & \text{אם קיים } a \in A \text{ יחיד המקיים } \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[s\binom{\mathsf{x}}{a}\right] = \mathsf{T} \\ \mathsf{F} & \text{אחרת} \end{cases}$$

אפשר גם
$$= \max_{a\in A} \min\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{a}\right], t_\neg\left(\max_{b\in A, b\neq a} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{b}\right]\right)\right)$$
או
$$= \min\left(\max_{a\in A} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{a}\right], t_\neg\left(\max_{a,b\in A, a\neq b} \min\left(\boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{a}\right], \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{b}\right]\right)\right)\right)$$
(ובאגפי ימין אפשר לכתוב גם $t_\wedge(\quad,\quad)$ במקום $\min(\quad,\quad)$, ו- $min_{\ldots} t_\neg(\ldots)$ במקום $t_\neg(\max_{\ldots}\ldots)$) אולם לא מומלץ ללכת בדרך זאת כי היא הרבה פחות שקופה מן הדרך הראשונה שהלכנו בה, קל מאוד לטעות בה. וקשה לבדוק אם תשובה מסוג זה היא נכונה או לא. כאשר הגדרנו את $\boldsymbol{\mathcal{A}}(\exists\mathsf{x}\phi)[s]$ בהגדרת האמת של תחשיב היחסים השתמשנו, במקביל להגדרה ה"מילולית", גם בהגדרה $\max_{a\in A} \boldsymbol{\mathcal{A}}(\phi)\left[\binom{\mathsf{x}}{a}\right]$. עשינו זאת רק משום שלחלק מן הצרכים הגדרה זאת נוחה מאוד ולא משום שחשבנו שהיא יותר מדוייקת מן ההגדרה המילולית. במקרה הנוכחי השימוש ב-max הוא הרבה פחות נוח מן ההגדרה המילולית.

אין להשתמש בביטויים מסוג $\phi(a)$ כאשר $a \in A$, כי אי אפשר להציב איבר של העולם בתוך נוסחה. גם הביטוי " a מקיים את ϕ", שבהקשרים מסויימים אפשר להשתמש בו כבהתבטאות נוחה, איננו במקום כאן בשלב של הגדרת האמת של נוסחה.

ד. תן תאור מלא של עץ האמת של הפסוק $\forall\mathsf{x}\exists\mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x},\mathsf{y})$. כמה ענפים יש לעץ זה, ומהו המודל של פסוק זה המתקבל מכל ענף?

מטרת שאלה זאת אינה למצוא מודל לפסוק $\forall\mathsf{x}\exists\mathsf{y}\mathsf{R}(\mathsf{x},\mathsf{y})$, כי זה טריביאלי משום שפסוק זה אמיתי בכל מבנה $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ בו היחס $R^{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ קיים לכל הזוגות של איברי A. המטרה בשאלה היא לראות את עץ האמת ואת המבנה המתקבל ישירות ממנו במקרה פשוט זה. לאור פשטות עץ האמת איננו זקוקים ללמה של קניג ולמשפטים אחרים כדי לדעת שלעץ האמת יש ענף אינסופי ושלקבוצת הפסוקים בענף יש מודל.

השפה במקרה זה מכילה רק את קבוע היחס R, ואני מעשירים אותה ע"י הוספת הקבועים c_i ל- $i \in \omega$. מכיוון שאין בשפה זאת סימני פעולה, שמות העצם הקבועים בשפה זאת הם בדיוק הקבועים האישיים c_i, אבל אנו יכולים להתעלם מכך, ומכיוון שהשפה כאן היא בת מנייה אנו יכולים לסמן את שמות העצם הקבועים ב-d_i עבור $i \in \omega$. כללי עץ האמת בהם נשתמש הם

$$\begin{array}{c} \ldots, \phi(d_k), \forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}) \\ | \\ \ldots, \forall\mathsf{x}\phi(\mathsf{x}), \ldots \end{array}$$

היכן ש-k הוא המספר המינימלי כך שהפסוק $\phi(d_k)$ אינו מופיע בצומת התחתון ובאבותיו. וגם

$$\begin{array}{c} \ldots, \phi(\mathsf{c}_k) \\ | \\ \ldots, \exists \mathsf{x} \phi(\mathsf{x}), \ldots \end{array}$$

היכן ש-k הוא המספר המינימלי כך שהקבוע האישי c_k אינו מופיע בצומת התחתון ובאבותיו.

חמש הקומות הראשונות בעץ האמת, המספיקות כדי להראות את התנהגות העץ הן

$$\begin{array}{c} \vdots \\ | \\ \mathsf{R}(d_1, \mathsf{c}_{k_1}), \mathsf{R}(d_2, \mathsf{c}_{k_2}), \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \\ | \\ \mathsf{R}(d_1, \mathsf{c}_{k_1}), \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(d_2, \mathsf{y}), \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \\ | \\ \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{R}(d_1, \mathsf{c}_{k_1}) \\ | \\ \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(d_1, \mathsf{y}), \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \\ | \\ \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \end{array}$$

היכן ש-c_i ו-d_{k_i} הם כנ"ל.

קל להוכיח באינדוקציה כי עבור $i \geq 1$ הקומה ה-$2i$ של עץ האמת היא בעלת צומת יחיד ובו הפסוקים $\mathsf{R}(d_1, \mathsf{c}_{k_1}), \ldots, \mathsf{R}(d_{i-1}, \mathsf{c}_{k_{i-1}}), \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(d_i, \mathsf{y}), \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ והקומה ה-$2i+1$ של עץ האמת היא היא בעלת צומת יחיד ובו הפסוקים $\mathsf{R}(d_1, \mathsf{c}_{k_1}), \ldots, \mathsf{R}(d_i, \mathsf{c}_{k_i}), \forall \mathsf{x} \exists \mathsf{y} \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$.

כך ראינו כי עץ האמת הוא בעל ענף יחיד. המבנה המתקבל מענף כלשהו של עץ האמת עולמו הוא קבוצת כל שמות העצם הקבועים $\{d_i \mid i \in \omega\}$. היחס $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}$ במבנה זה נקבע ע"י הפסוקים האטומיים המופיעים בענף ולכן הוא נקבע ע"י $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(d_i, \mathsf{c}_{k_i}) = \mathit{T}$ ל- $i \in \omega$ ו- $\mathsf{R}(d, d') = \mathit{F}$ לכל זוג d, d' של שמות עצם קבועים השונה מזוגות אלו.

אפשר לשים לב ששמות העצם הקבועים היחידים במקרה הנוכחי הם $\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \ldots$ ואז אפשר לקבוע $d_i = \mathsf{c}_i$ ו- $k_i = i+1$. כך עולמו של המודל המתקבל מן הענף הוא $A = \{\mathsf{c}_i \mid i \in \omega\}$ והיחס של המבנה נתון ע"י $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(\mathsf{c}_i, \mathsf{c}_j) = \mathit{T}$ אםם $j = i+1$.

2. א. הגדר את ההחלפה של משתנים מכומתים בנוסחה של תחשיב היחסים.

ב. נסח והוכח את המשפט העונה על השאלה כיצד החלפה זאת משפיעה על ערך האמת של הנוסחה.

ההחלפה של המשתנים המכומתים נדונה בפרק ט' באתר. ההחלפה מוגדרת ב-9.29. המשפט האומר שבתנאים מסויימים החלפת המשתנים המכומתים בנוסחה אינה משפיעה על ערך האמת שלה הוא 9.31.

בהגדרת ההחלפה נעשה שימוש בהצבת משתנים במקום משתנים אחרים. לכן במשפט הסמנטי על ההחלפה נעשה שימוש במשפט הסמנטי של ההצבה. יש להקפיד ששימוש זה ייעשה בדרך הנכונה. בין היתר יש להזכיר שהמשתנים אותם מציבים כשרים להצבה עבור המשתנים האחרים. דבר זה מוכח ב-9.30.

3. א. הגדר מתי פונקציה H היא הומומורפיזם ממבנה על מבנה (הומומורפיזם הוא כמו איזומורפיזם, פרט לזה ש-H אינה חד חד ערכית).

ב. איזה תנאי נוסף מקיים ההומומורפיזם H כאשר השפה מכילה את סימן השיוויון $\approx$ המתפרש

בשני המבנים כיחס הזהות?

ג. נסח והוכח את משפט ההומומורפיזם (שהוא ההכללה המיידית של משפט האיזומורפיזם).

לפני שניגש לענות על שאלה זאת נצביע על דרך התבוננות במה שאנו כותבים, שנקרא לה עקרון ההשתייכות. במקרה הנוכחי העצמים הבסיסיים איתם אנו עוסקים הם מחמישה סוגים שונים: איברי A, איברי B, שמות עצם, נוסחאות וערכי אמת. כל פונקציה ויחס איתם אנו עוסקים פועלים בדרך כלל על עצמים מסוג מסויים ונותנים ערכים מסוג מסויים. טעויות נפוצות מאוד בפתרון שאלה זאת ובמקומות רבים אחרים מקורן בהפעלת פעולות ויחסים על עצמים שאינם שייכים לקבוצה המתאימה ובהשוואת עצמים מקבוצות שונות, ונראה עתה מספר דוגמאות. ההומומורפיזם H פועל על איברי A וערכיו הם איברי B. לכן, עבור $a \in A$ $H(a)$ הוא ביטוי לגיטימי והוא איבר של B. מצד שני, $H(t)$ אינו מוגדר לשם עצם t, $H(\phi)$ אינו מוגדר לנוסחה ϕ ו- $H(\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a_1,a_2))$ אינו מוגדר כי H אינה פועלת על ערכי אמת. כך למשתנים x,y ו- $a,b \in A$ $\mathsf{x} \approx \mathsf{y}$ היא נוסחה ו- $a \approx b$ לא מוגדר (כי $\approx$ הוא סימן יחס ואינו יחס), ו- $a \approx^{\mathcal{A}} b$ הוא ערך אמת (כי $\approx^{\mathcal{A}}$ הוא יחס על A) ואילו $\mathsf{x} \approx^{\mathcal{A}} \mathsf{y}$ אינו מוגדר.

א. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לאותה שפה L. H נקראת הומומורפיזם מ-$\mathcal{A}$ ל-$\mathcal{B}$ אם H היא פונקציה מ-A על B המקיימת את התנאים הבאים.

(i) לכל $n \geq 1$, לכל קבוע יחס n-מקומי R ב-L, ולכל $a_1,\ldots,a_n \in A$

$$\mathsf{R}^{\mathcal{B}}(H(a_1),\ldots,H(a_n)) = \mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)$$

(נעיר שזה לא נכון לכתוב $\mathsf{R}^{\mathcal{B}}(a_1,\ldots,a_n)$ כי $\mathsf{R}^{\mathcal{B}}$ הוא יחס על B ואינו פועל על איברי A, וזה גם לא נכון לדרוש $\mathsf{R}^{\mathcal{B}}(H(a_1),\ldots,H(a_n)) = H(\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n))$ כי H אינו פועל על $\mathsf{R}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)$ שהוא ערך אמת).

(ii) לכל קבוע אישי c של L

$$H(\mathsf{c}^{\mathcal{A}}) = \mathsf{c}^{\mathcal{B}}$$

(לא יתכן $\mathsf{c}^{\mathcal{A}} = \mathsf{c}^{\mathcal{B}}$ כי $\mathsf{c}^{\mathcal{A}} \in A$ ו- $\mathsf{c}^{\mathcal{B}} \in B$).

(iii) לכל $n \geq 1$, לכל קבוע פעולה n-מקומי G ב-L, ולכל $a_1,\ldots,a_n \in A$

$$\mathsf{G}^{\mathcal{B}}(H(a_1),\ldots,H(a_n)) = H(\mathsf{G}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n))$$

(לא יתכן $\mathsf{G}^{\mathcal{B}}(H(a_1),\ldots,H(a_n)) = \mathsf{G}^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)$ כי אגף ימין הוא ב-A ואגף שמאל ב-B).

ב. לפי (i) בהגדרת ההומומורפיזם קיים, לכל $a_1,a_2 \in A$, $\approx^{\mathcal{B}}(H(a_1),H(a_2)) = \mathsf{T}$ אםם $\approx^{\mathcal{A}}(a_1,a_2) = \mathsf{T}$. מכיוון ש- $\approx^{\mathcal{A}}$ הוא יחס הזהות על A ו- $\approx^{\mathcal{B}}$ הוא יחס הזהות על B קיים ש- $a_1 = a_2$ אםם $H(a_1) = H(a_2)$, וזה אומר שהפונקציה H היא חד חד ערכית.

ג. משפט ההומומורפיזם. יהיו $\mathcal{A}$ ו-$\mathcal{B}$ מבנים לשפה L, יהי H הומומורפיזם מ-$\mathcal{A}$ ל-$\mathcal{B}$ ותהי s השמה ל-$\mathcal{A}$. נסמן ב-$H(s)$ את ההשמה ל-$\mathcal{B}$ הנתונה ע"י $H(s)(\mathsf{x}) = H(s(\mathsf{x}))$ לכל משתנה x של L.

(i) לכל שם עצם t ב-L

$$\mathcal{B}(t)[H(s)] = H(\mathcal{A}(t)[s])$$

(כאן H מופעל על $\mathcal{A}(t)[s]$ שהוא ב-A ושני האגפים של השוויון הם ב-B).

(ii) לכל נוסחה ϕ ב-L

$$\mathcal{B}(\phi)[H(s)] = \mathcal{A}(\phi)[s]$$

(כאן שני אגפי השיווין הם ערכי אמת ואי אפשר להפעיל את H עליהם).

ובמיוחד, לכל פסוק ϕ ב-L

$$\mathcal{B}(\phi) = \mathcal{A}(\phi)$$

.

הוכחת משפט זה זהה להוכחת משפט האיזומורפיזם 9.39 בפרק ט' באתר.

4. נסח והוכח את משפט השלמות מבחינת לוחות האמת של תחשיב הפסוקים, כלומר את המשפט שלכל לוח אמת יש קשר מתאים.

משפט השלמות מבחינת לוחות האמת הוא משפט 4.19 בספר הקורס וההוכחה שלו נמצאת שם.